

## 1 Cylindre qui roule et décolle

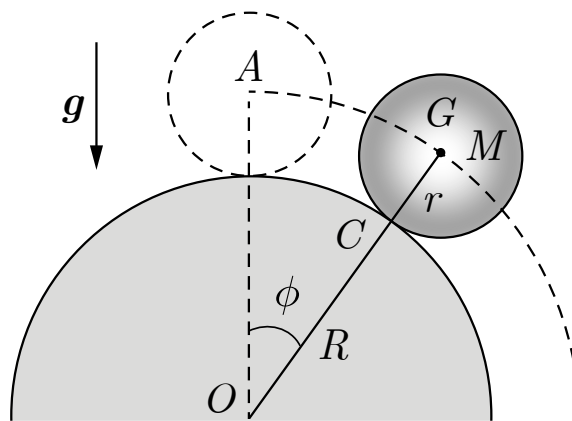
🕒 **Objectif** : Modéliser le mouvement de rotation propre d'un solide indéformable à l'aide de considérations énergétiques.

📖 **Théorie** : 12.2 Dynamique du solide indéformable ; 13.2 Solide indéformable avec un axe fixe.

★ **Examen** : Problème d'examen.

Un petit cylindre homogène de masse  $M$ , de rayon  $r$  roule sans glisser sur un grand cylindre fixe de rayon  $R$  où  $R > r$ . Le point de contact entre les deux cylindres est le point  $C$  dans le plan vertical en coupe. Initialement, le petit cylindre (en traitillé) est immobile au sommet du grand cylindre et son centre de masse  $G$  est confondu avec le point  $A$  qui se trouve à une distance  $R + r$  au-dessus du centre  $O$  du grand cylindre. Puis, le petit cylindre se met à rouler sans glisser vers la droite avant de décoller du grand cylindre. Le frottement statique permet le roulement sans glissement du petit cylindre, mais il n'y a pas de frottement cinétique. Le moment d'inertie du petit cylindre autour de l'axe de symétrie horizontal qui passe par son centre de masse  $G$  s'écrit,

$$I_G = \lambda Mr^2 \quad \text{où} \quad \frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1.$$



- Avant le décollage, lier la vitesse angulaire de précession  $\dot{\phi}$  à la vitesse angulaire de rotation propre  $\dot{\psi}$  et déterminer les équations de contraintes dans le plan vertical.
- Jusqu'au décollage, déterminer les travaux  $W_{0 \rightarrow 1}(\mathbf{F}_s)$  et  $W_{0 \rightarrow 1}(\mathbf{P})$  effectués par la force de frottement statique  $\mathbf{F}_s$  entre les deux cylindres et le poids

$P$  du petit cylindre de l'angle initial  $\phi_0 = 0$  à l'angle de décollage  $\phi_1$  du petit cylindre.

- (c) Déterminer la variation d'énergie cinétique totale  $\Delta T_{0 \rightarrow 1}$  du petit cylindre de l'angle initial  $\phi_0 = 0$  à l'angle de décollage  $\phi_1$  en termes de la vitesse angulaire de precession  $\dot{\phi}$ .
- (d) L'angle de décollage  $\phi_1(\lambda)$  du petit cylindre est caractérisé par le paramètre  $\lambda$ . Dans la limite où le petit cylindre a un moment d'inertie nul et se comporte donc comme un point matériel, c'est-à-dire  $\lambda = 0$ , l'angle de décollage est donné par l'équation,

$$\cos(\phi_1(0)) = \frac{2}{3}.$$

Pour  $\lambda > 0$ , déterminer la relation d'ordre entre  $\phi_1(\lambda)$  et  $\phi_1(0)$ .

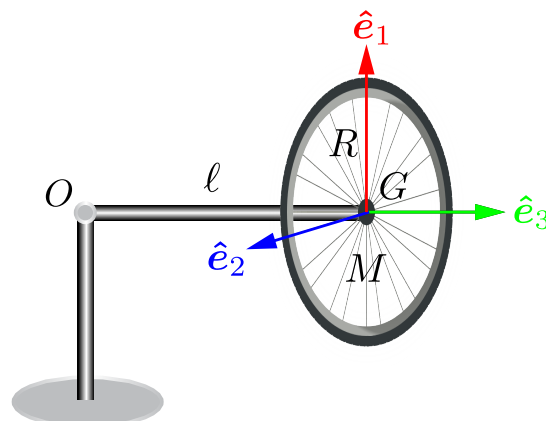
- (e) A l'aide de l'énergie mécanique  $E$  du petit cylindre et de la formule de Huygens-Steiner évalués au point de contact  $C$  entre les cylindres, déterminer l'équation du mouvement du centre de masse  $G$  du petit cylindre avant le décollage et l'écrire explicitement seulement en termes de l'angle  $\phi$  et de ses dérivées temporelles.

## 2 Gyroscope avec une roue de vélo

🎯 **Objectif** : Modéliser le mouvement gyroscopique d'une roue.

📖 **Théorie** : 13.2 Solide indéformable avec un axe fixe ; 13.3 Gyroscope et effets gyroscopiques

Une roue de vélo de masse  $M$  et de rayon  $R$  est montée à l'extrémité d'un axe de longueur  $\ell$  et de masse négligeable. L'autre extrémité est fixée sur un socle vertical à l'origine  $O$ . On suppose que le frottement cinétique est négligeable. La roue est mise en rotation propre autour de son axe qui est lâché horizontalement.



Dans le repère d'inertie  $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ , qui n'a pas de mouvement de rotation propre, les composantes des moments d'inertie de la roue par rapport au centre de masse sont,

$$I_{G_1} = I_{G_2} = \frac{\lambda}{2} MR^2 \quad \text{et} \quad I_{G_3} = \lambda MR^2 \quad \text{où} \quad \frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1.$$

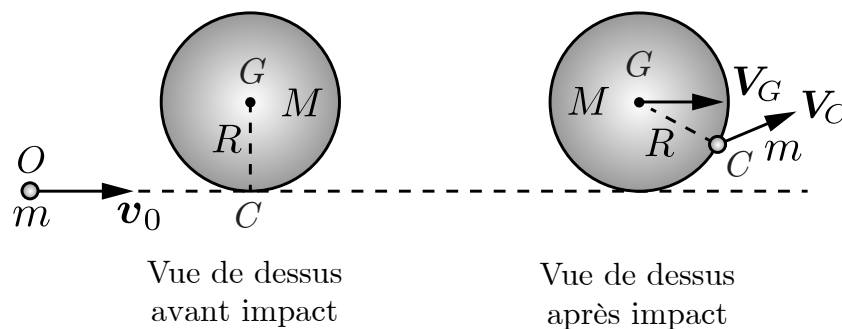
- Justifier pourquoi il n'y a pas de nutation de l'axe de la roue en déterminant le moment de force résultant exercé sur la roue évalué à l'origine  $O$ .
- Déterminer le moment cinétique de la roue  $\mathbf{L}_O$  évalué à l'origine et calculer sa dérivée temporelle.
- Exprimer la vitesse angulaire de précession  $\dot{\phi}$  en termes de la vitesse angulaire de rotation propre  $\dot{\psi}$  et déterminer les accélérations angulaires de précession  $\ddot{\phi}$  et de rotation propre  $\ddot{\psi}$ .

### 3 Collision entre un projectile et un puck

🎯 **Objectif** : Modéliser une collision et un mouvement de rotation propre avec frottement.

📖 **Théorie** : 13.2 Solide indéformable avec un axe fixe ; 13.3 Gyroscope et effets gyroscopiques

Un puck, considéré comme un cylindre homogène et indéformable de masse  $M$  et de rayon  $R$ , est initialement posé sur une très grande table à coussin d'air parfaitement horizontale. Un projectile, considéré comme un point matériel de masse  $m$  de vitesse initiale  $\mathbf{v}_0$  glisse sans frottement sur la table et entre en collision avec le cylindre et reste encastré au point  $C$  à la surface du cylindre. La trajectoire du point matériel de masse  $m$  avant la collision passe par l'origine  $O$ .



Après la collision, le centre de masse du puck  $G$  subit une force de frottement visqueux et le puck est soumis à un moment de force de frottement visqueux,

$$\mathbf{F}_f = -b \mathbf{V}_G \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_G(\mathbf{F}_f) = -\kappa_G \boldsymbol{\Omega}.$$

La masse du projectile est négligeable par rapport à la masse du puck, c'est-à-dire  $m \ll M$ . Ainsi, le moment d'inertie  $I_G$  du puck évalué en son centre de masse  $G$  se réduit à celle du puck homogène,

$$I_G = \frac{1}{2} MR^2.$$

- (a) Déterminer la vitesse du centre de masse  $\mathbf{V}_G(0)$  du puck avec le point matériel encastré après la collision juste après la collision.
- (b) Déterminer la vitesse angulaire de rotation  $\boldsymbol{\Omega}(0)$  juste après la collision.
- (c) Déterminer l'équation du mouvement du centre de masse et en déduire l'évolution temporelle de la vitesse du centre de masse  $\mathbf{V}_G(t)$ .
- (d) Déterminer l'équation du mouvement de rotation du puck et en déduire l'évolution temporelle de la vitesse angulaire  $\boldsymbol{\Omega}(t)$ .
- (e) Déterminer l'évolution temporelle de la vitesse  $\mathbf{V}_C(t)$  du point  $C$ .